



# فصل ۶

## سطح و حجم



- حجم های هندسی
- محاسبه حجم های منشوری
- مساحت جانبی و کل
- حجم و سطح

اهمیت بسته بندی محصولات غذایی کمتر از اهمیت تولید آن محصول نیست. برای مثال در بسته بندی شیرینی و شکلات کیفیت و ظاهر بسته بندی در فروش آن تأثیر زیادی دارد. یکی از موضوعات مهم در این بسته بندی ها رابطه بین سطح و حجمی است که با آن سطح ساخته می شود.



۱- به اطراف خود (کلاس، خانه، خیابان و ...) به دقت نگاه کنید.

آیا چیزی پیدا می کنید که حجم نداشته باشد؟ خمیر

در تصویر مقابل چه نوع حجم هایی را می بینید؟ استوانه - مکعب - هرم  
آیا همه آنها شکل هندسی دارند؟ خمیر (چون شکل هندسی نقطه دارد)  
آیا می توانید یک طبقه بندی از انواع حجم ها ارائه کنید؟

- ۱- کره
- ۲- منشوری
- ۳- هرمی

حجم ها را می توان به دو دسته هندسی و غیر هندسی تقسیم کرد. حجم های هندسی شکل های مشخص و تعریف شده دارند. حجم های هندسی را می توان به سه دسته اصلی تقسیم کرد. منشوری - کره - هرمی. برخی از حجم های هندسی نیز ترکیبی از این سه نوع اند.

۱- در تصویر فعالیت بالا حجم های هندسی را با ✓ و غیر هندسی را با ✗ مشخص کنید.

در حجم های هندسی نوع آن را تعیین کنید.

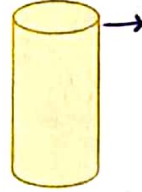
در حجم های ترکیبی نیز مشخص کنید که از چه نوع حجم هایی ساخته شده اند.

۲- با توجه به شکل های زیر خصوصیت های سه نوع حجم هندسی زیر را بنویسید.

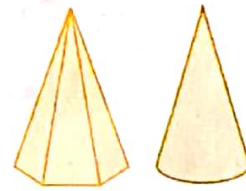
استوانه نوکی منشوری است.



حجم های کره



حجم های منشوری



حجم های هرمی

مضروب نوعی  
از هرم است

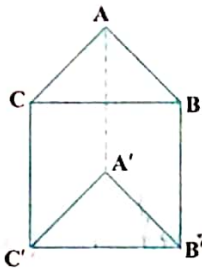
حجم های منشوری: منشورها، شش ماواحسام ۳ بعدی هستند. یک منشور همیشه دو وجه موازی دارد که به این دو وجه قاعده گوئیم. با هر ضلع قاعده یک وجه متصل شده که وجه های جانبی نام دارند. وجه های جانبی منشور مستطیل هستند. حجم های هرمی: یک قاعده دارند. همه وجه ها به جز قاعده به یک رأس می رسند. وجه جانبی مثلث می باشند. حجم های کره:

۷. قاعده ندارند. فاصله همه نقاط روی سطح از مرکز به یک فاصله اند.

حجم های منشوری بین دو صفحه موازی قرار می گیرند.

به این دو سطح موازی که سطح منشوری را قطع می کنند، **قاعده** و به سطح های اطراف آن **وجه های جانبی** می گویند. به محل برخورد سطح ها **یال** و به نقطه برخورد هر سه سطح **رأس** می گویند.

۱- در هر یک از منشورهای زیر مشخص کنید چند وجه جانبی دارد؛ یال ها، رأس ها و قاعده ها را نام ببرید.



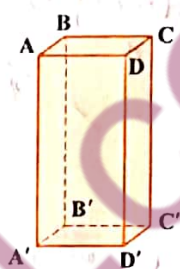
منشور سه پهلو

تعداد وجه های جانبی: ۳

رأس ها: ۶

یال ها: ۹

قاعده ها: ۲



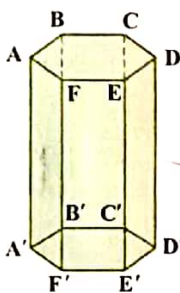
منشور چهار پهلو

تعداد وجه های جانبی: ۴

رأس ها: ۸

یال ها: ۱۲

قاعده ها: ۲



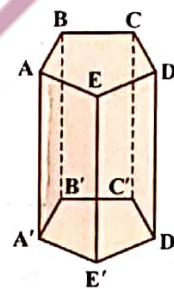
منشور شش پهلو

تعداد وجه های جانبی: ۶

رأس ها: ۱۲

یال ها: ۱۸

قاعده ها: ۲



منشور پنج پهلو

تعداد وجه های جانبی: ۵

رأس ها: ۱۰

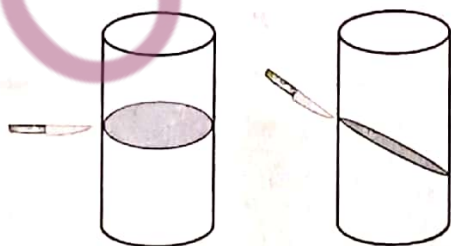
یال ها: ۱۵

قاعده ها: ۲

۲- برای اینکه در نام بردن یال و رأس چیزی جا نیفتد، از چه راهبردی استفاده می کنید؟ **الگوی سازی**

۳- آیا استوانه هم یک حجم منشوری است؟ چرا؟ بله، چون دو وجه موازی دارد، و وجه جانبی آن، مستطیل مثل هست.

با خمیر مجسمه سازی (یا می توانید از یک سیب زمینی استفاده کنید) یک استوانه بسازید. با یک قیچی یا چاقو مانند شکل های



مقابل آن را برش بزنید. سطح برش خورده را رنگ کنید و روی یک کاغذ بزنید، اثر آن به چه شکلی است؟ **بیضی**

همین فعالیت را می توانید با برش های دیگر تکرار کنید. همچنین به جای استوانه می توانید منشورهای دیگری را هم امتحان کنید. به این کار **مقطع زدن** می گویند.

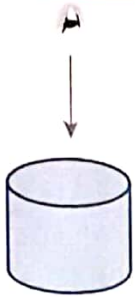
نرم افزارهای زیادی هستند که می توانند این فعالیت را شبیه سازی کنند. در صورت تمایل از آنها استفاده کنید.

۱- آیا ممکن است مقطع یک کره و یک استوانه هم شکل باشند؟ در چه صورت؟ بله

آیا ممکن است مقطع یک منشور و یک هرم هم شکل باشند؟ بله

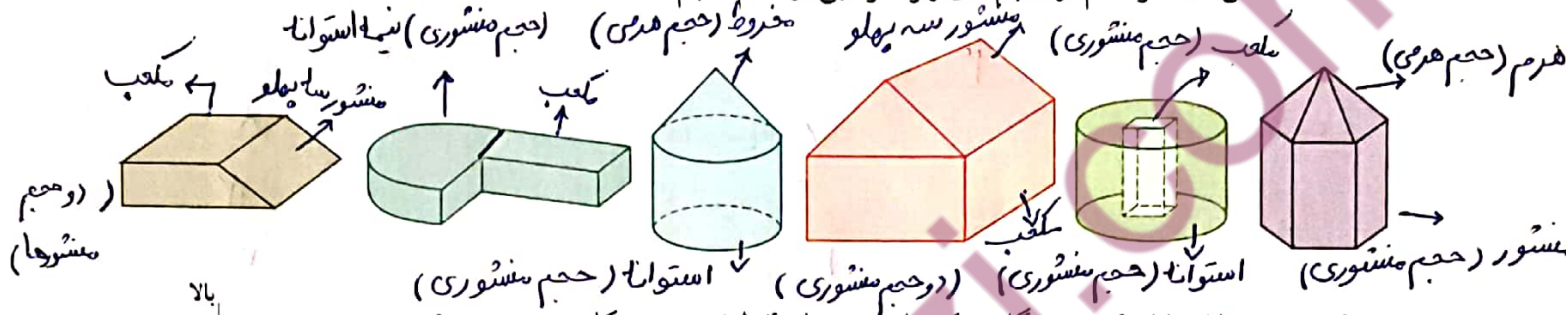
۲- یک استوانه از دید بالا به چه شکلی دیده می شود؟ دایره

یک منشور ۶ پهلو به چه شکلی دیده می شود؟ ۶ ضلعی

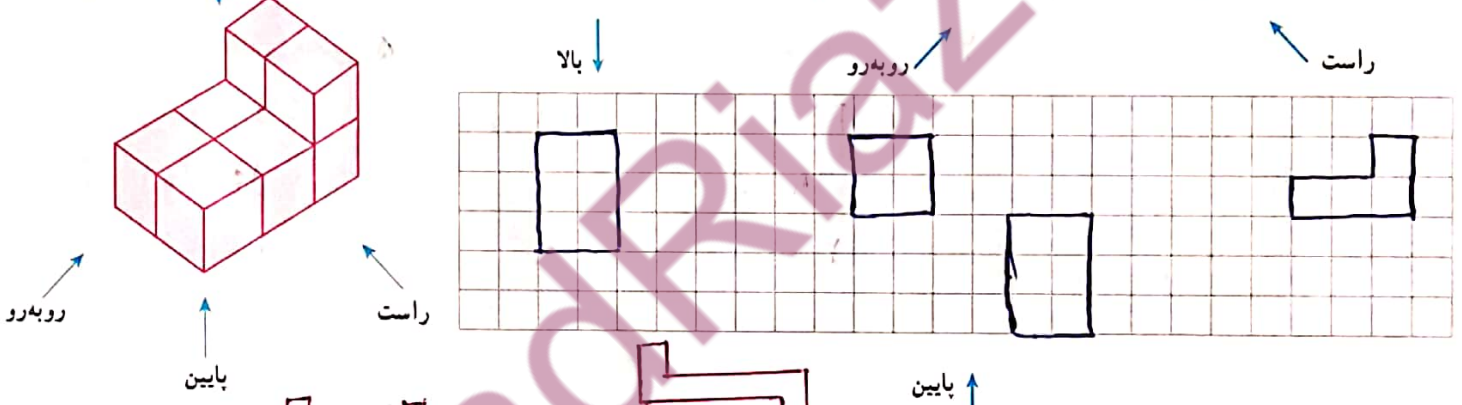


یک منشور ۶ ضلعی با قاعده ۶ ضلعی منتظم روی دایره قاعده استوانه است. این حجم از بالا به چه شکلی دیده می شود؟ دایره ای که یک منشور ۶ ضلعی درون آن محاط شده است.

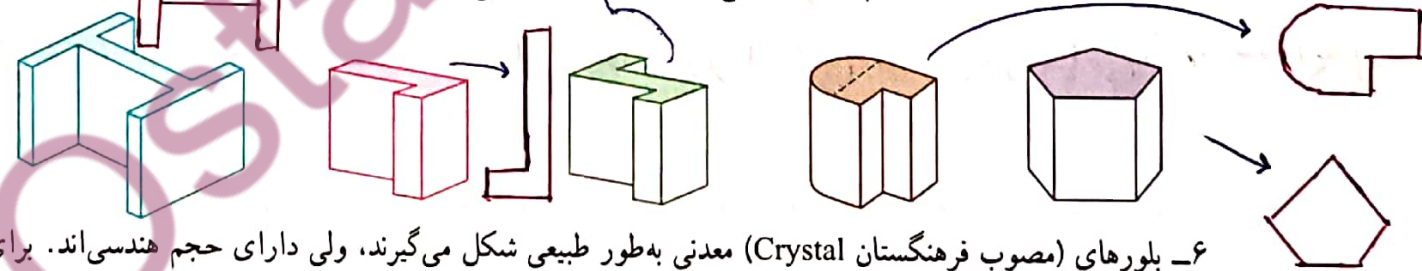
۳- مشخص کنید هر کدام از حجم های زیر، ترکیبی از کدام حجم ها هستند؟



۴- حجم مقابل را از ۴ جهت نگاه می کنیم این حجم از ۴ طرف به چه شکلی دیده می شود؟

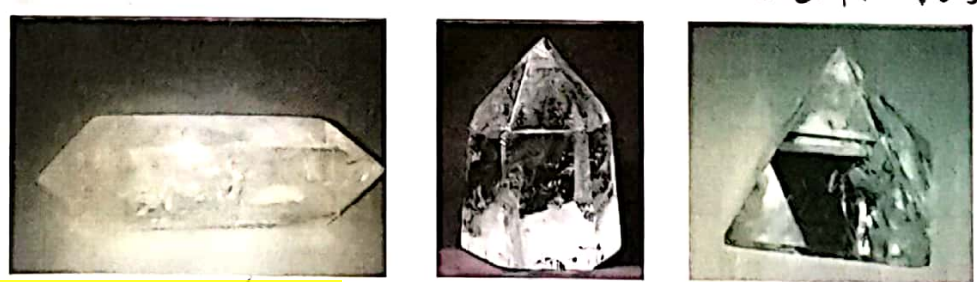


۵- قاعده منشورهای زیر را رسم کنید (در واقع دید از بالا همان مقطع منشور است).



۶- بلورهای (مصوب فرهنگستان Crystal) معدنی به طور طبیعی شکل می گیرند، ولی دارای حجم هندسی اند. برای نمونه

مشخص کنید ۳ بلور زیر از چه حجم هایی درست شده اند؟

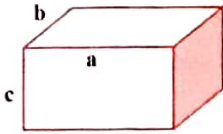


هرمی و منشوری

هرمی

# محاسبه حجم های منشوری

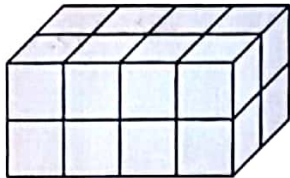
۱- در دوره دبستان آموختید که حجم یک مکعب مستطیل برابر است با حاصل ضرب طول، عرض و ارتفاع. با توجه به درس جبر که در فصل قبل آموختید، حجم مکعب مستطیل را با یک رابطه جبری نشان دهید.



$$V = a \times b \times c = abc$$

ارتفاع  $\swarrow$   
 عرض  $\downarrow$   
 طول  $\searrow$

۲- قاعده مکعب مستطیل از ۸ مربع به ضلع یک سانتی متر درست شده است.  $(2 \times 4)$



اگر روی این قاعده، مکعب مستطیلی به ارتفاع ۲ سانتی متر درست کنیم،

$$2 \times 4 \times 2 = 16 \text{ cm}^3$$

حجم آن چقدر می شود؟

اگر قاعده مکعب مستطیل  $3 \times 4$  باشد، با همان ارتفاع چه حجمی درست می شود؟

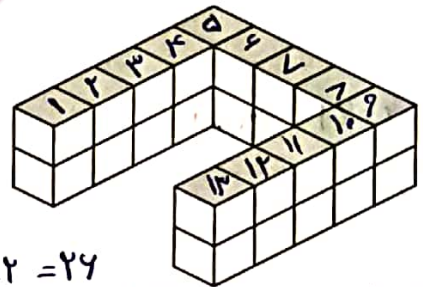
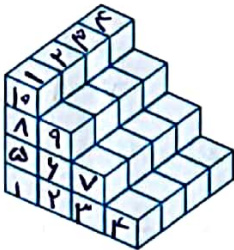
$$3 \times 4 \times 2 = 24 \text{ cm}^3$$

۳- همچنین آموختید که واحد حجم مکعبی به ضلع ۱ سانتی متر یا ۱ متر، یک سانتی متر مکعب یا یک متر مکعب می گویند.

مشخص کنید که هر کدام از حجم های زیر از چند مکعب واحد درست شده اند.

$$8 \times 4 = 32$$

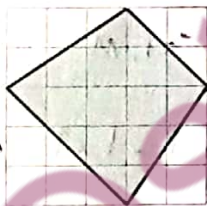
$$10 \times 4 = 40$$



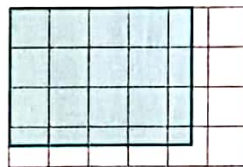
$$13 \times 2 = 26$$

۴- اکنون هر کدام از شکل های زیر را به مربع هایی به ضلع ۱ سانتی متر تقسیم کنید تا مشخص شود قاعده هر کدام چند مربع به

ضلع یک سانتی متر است (می توانید از عددهای کسری هم استفاده کنید).



$$\frac{5 \times 5}{2} = 12,5$$



$$12 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 12 \frac{3}{4}$$

$$12,5 \times 3 = 37,5$$

و واحد مکعب

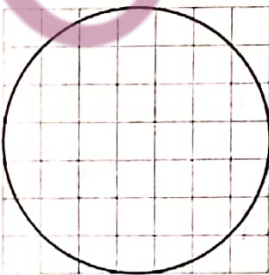
$$\frac{51}{4} \times 3 = \frac{153}{4}$$

واحد مکعب

اگر روی این قاعده ها منشوری به ارتفاع ۳ سانتی متر درست کنیم، حجم هر کدام چقدر می شود؟

اگر به همین ترتیب بتوانیم مساحت قاعده هر منشور را با مربع های واحد سطح تقریب بزنیم، چگونه

می توانیم حجم شکل های منشوری را به دست آوریم؟



برای مثال قاعده یک استوانه را که به شکل دایره است، با مربع های واحد تقریب بزنید و حجم

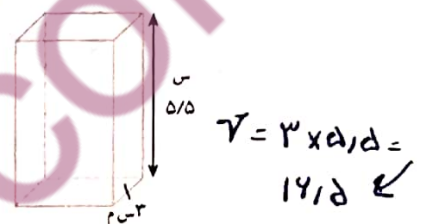
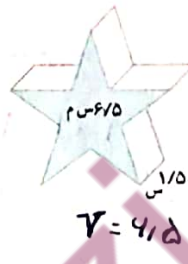
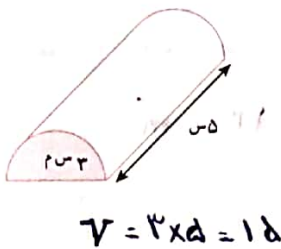
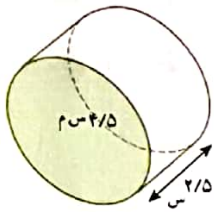
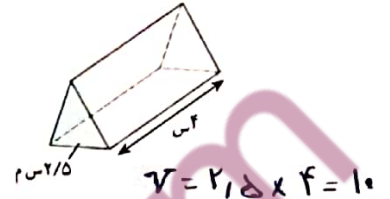
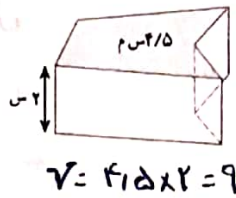
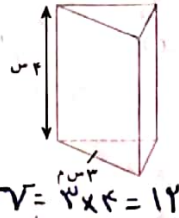
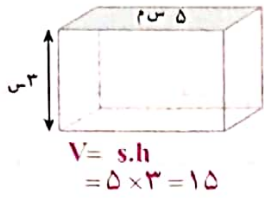
استوانه به ارتفاع ۳ سانتی متر را به طور تقریبی به دست آورید.

$$V \approx 37 \times 3 = 111$$

$$V = \left( \frac{31,5}{4} \times \frac{31,5}{4} \times \frac{31,4}{4} \right) \times 3 = 115,4$$

۱- با توجه به فعالیت صفحه قبل، رابطه جبری به دست آوردن حجم های منشوری (V) را که در آن مساحت قاعده منشور (S) و ارتفاع منشور (h) است، بنویسید.

۲- با توجه به رابطه بالا و مساحت قاعده داده شده، حجم هر شکل را محاسبه کنید.

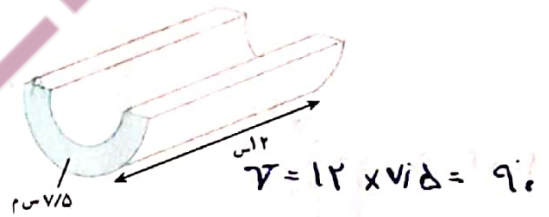
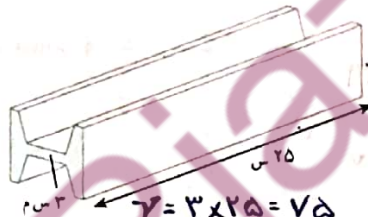
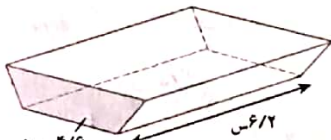


$V = 4.5 \times 2.5 = 11.25$

$V = 3 \times 5 = 15$

$V = 4.5 \times 1.5 = 9.75$

$V = 3 \times 5 \times 1.5 = 14.5$



$V = 4.4 \times 4.2 \times 1.2 = 28.152$

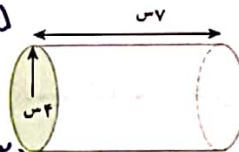
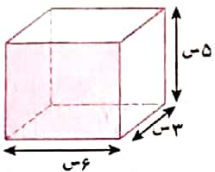
$V = 3 \times 2.5 \times 10 = 75$

$V = 12 \times 7.5 = 90$

۳- ابتدا مساحت قاعده و سپس حجم هر یک از اجسام زیر را حساب کنید. برای به دست آوردن مساحت و حجم هر شکل

رابطه های جبری را بنویسید.

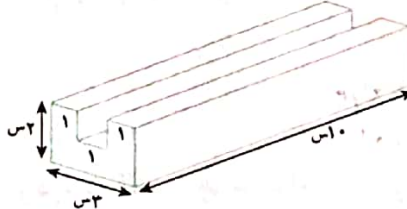
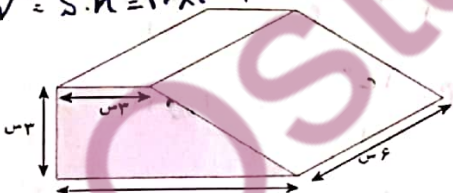
$S = 4 \times 4 \times 3.14 = 50.24$   
 $V = S \times h = 50.24 \times 7 = 351.68$



$S = 4 \times 4 = 16$   
 $V = S \cdot h = 16 \times 3 = 48$

$S = 5 \times 5 = 25$   
 $V = S \cdot h = 25 \times 2 = 50$

$V = S \times h = 50.24 \times 7 = 351.68$



$S = 3 \times 2 - 1 \times 1 = 5$

$V = S \times h = 5 \times 10 = 50$

۴- منبع آبی به شکل استوانه است که شعاع قاعده آن ۰/۸ متر و ارتفاعش

۲ متر است. این منبع چند متر مکعب آب می گیرد؟

$S = (\pi \times 0.8 \times 0.8 \times 3.14) = 21.0094$

$V = S \cdot h = 21.0094 \times 2 = 42.0188$

۴۲ متر مکعب آب می گیرد



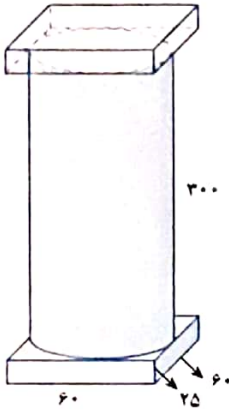
$$32000 \div 1500 = 21.33$$

۲۴ دستمال کاغذی در یک کارتن حاوی شود.

۵- یک جعبه دستمال کاغذی به شکل مکعب مستطیل داریم که طول آن ۲۵، عرض آن ۱۲ و ارتفاعش ۵ سانتی متر است. تعیین کنید چند عدد از این جعبه‌ها در یک کارتن که به شکل مکعب مستطیل به ابعاد ۵۰ و ۳۰ و ۲۴ سانتی متر است، جا می‌گیرد؟

حجم یک جعبه دستمال کاغذی  $V = 25 \times 12 \times 5 = 1500$  حجم کارتن  $V = 50 \times 30 \times 24 = 36000$

کاغذی



۱- حجم ستون شکل مقابل را به صورت تقریبی پیدا کنید.

$$S = 4 \times 40 = 3400$$

$$V = 3400 \times (25 + 300 + 25) = 1,240,000$$

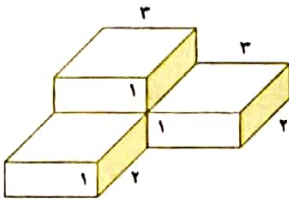
حالا کمی دقیق‌تر محاسبه کنید و آن را به سه قسمت تقسیم کنید و حجم سه تکه را جداگانه حساب کنید

و مجموع را به دست آورید (شعاع قاعده استوانه چند است؟).  $\text{مکعب} = 4 \times 4 \times 25 = 9000$

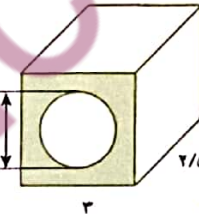
تفاوت دو جواب را به دست آورید.  $V = (30 \times 30 \times 3.14) \times 300 = 847,800$

۲- حجم اشکال زیر را به دست آورید.  $V = 2 \times (\text{مکعب}) + \text{استوانه} = 2 \times 9000 + 847,800 = 1,027,800$

$V = 3 \times 2 \times 1 = 6$   
 $V = 4 \times 4 = 16$

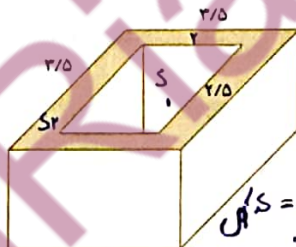
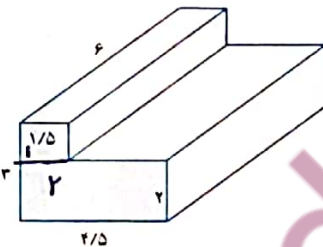


$V = 9,14 \times 10 = 91,4$   
 $S = S_1 - S_2 = 91,4$   
 $S_1 = 1 \times 1 \times 3,14 = 3,14$   
 $S_2 = 2 \times 2 \times 3,14 = 12,56$

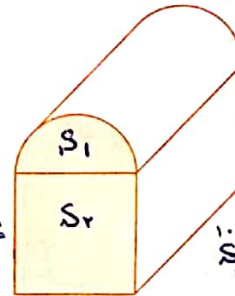


$S_1 = 3 \times 3 = 9$   
 $S_2 = 1 \times 1 \times 3,14$   
 $S = 9 - 3,14 = 5,86$   
 $V = 5,86 \times 2,5 = 14,65$

$S_1 = 1,5 \times 1 = 1,5$   
 $S_2 = 4,5 \times 2 = 9$   
 $S_1 + S_2 = 10,5$   
 $V = 10,5 \times 4 = 42$



$S_1 = 2,5 \times 2 = 5$   
 $S_2 = 3,5 \times 3,5 = 12,25$   
 $V = 7,75 \times 2 = 15,5$



$S_1 = 4 \times 4 \times 3,14 \div 2 = 25,12$   
 $S_2 = 8 \times 8 = 64$   
 $S_1 + S_2 = 44 + 25,12 = 69,12$   
 $89,12 \times 10 = 891,2$

۳- چاهی به عمق ۱۲ متر حفر کرده‌ایم. شعاع دهانه این چاه ۱/۴ متر است. وقتی خاک کنده و بیرون ریخته می‌شود، حجم آن

۱/۳ برابر می‌شود. اگر خاک این چاه بعد از بیرون آمدن در سطحی به ابعاد ۴ و ۵ متر به طور یکنواخت ریخته شود تا یک مکعب مستطیل

به وجود آید، ارتفاع این مکعب مستطیل چقدر خواهد شد؟  $V = 7,4 \times 7,4 \times 3,14 \times 1,3 = 7,84$   $h = \frac{V}{S} = \frac{7,84}{5 \times 4} = 0,39$

۴- حوضی است به شکل مکعب مستطیل که ابعاد آن ۳ و ۴ و ۱/۵ متر است. این حوض خالی را با شیر آبی که در هر دقیقه ۶۰

لیتر آب وارد آن می‌کند، پر می‌کنیم. چند ساعت طول می‌کشد تا حوض پر شود؟  $V = 3 \times 4 \times 1,5 = 18 \text{ m}^3$   $18 \times 1000 = 18000$  لیتر  
ساعت طول می‌کشد  $\frac{18000}{60} = 300$  ساعت

۵- یک پارچ به شکل استوانه است که ارتفاع آن ۳۰ سانتی متر و شعاع قاعده آن ۸ سانتی متر است. آب داخل این پارچ را در

لیوان‌هایی به شکل استوانه که ارتفاع آنها ۱۰ سانتی متر و شعاع قاعده آن ۴ سانتی متر است، می‌ریزیم. این آب چند لیوان را پر می‌کند؟

۶- قاعده یک منشور سه پهلو مثلث قائم الزاویه‌ای که اندازه ضلع‌های قائمه آن ۳ و ۴ است. ارتفاع این منشور ۶ سانتی متر است.

$V = \left(\frac{3 \times 4}{2}\right) \times 6 = 36$

حجم این منشور را پیدا کنید.

$V = 4 \times 4 \times 3,14 \times 30 = 1507,2$

۷۵

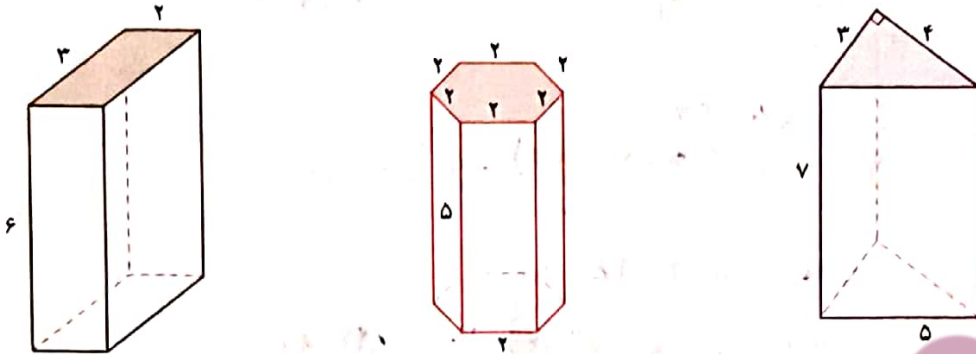
$V = 2 \times 2 \times 3,14 \times 10 = 125,6$

جواب ۵

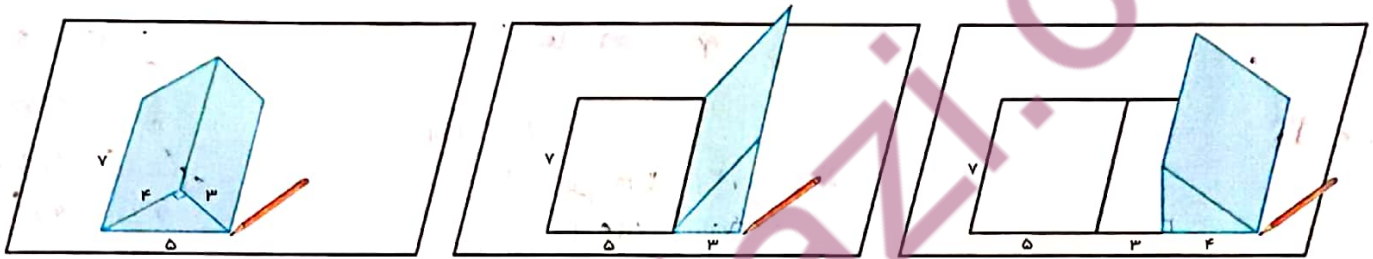
لیوان را پر می‌کند  $V = 125,6$  لیوان

# مساحت جانبی و کل

۱- مساحت همه وجه‌های جانبی منشورهای زیر را به دست آورید. هر وجه جانبی چه شکلی دارد؟ مثلث - مستطیل - ... مساحت کل را به دست آورید. به مجموع این مساحت‌ها مساحت جانبی شکل می‌گویند.



۲- برای به دست آوردن مجموع مساحت جانبی منشور سه پهلوئی بالا به صورت زیر، آن را روی کاغذ قرار می‌دهیم، و به اندازه طول هر ضلع یک علامت می‌گذاریم.

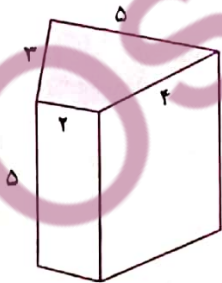


با توجه به شکل‌های بالا چگونه می‌توانستیم ساده‌تر مساحت جانبی را به دست آوریم؟

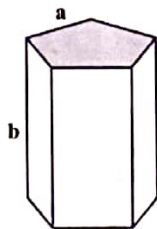
۳- با توجه به سؤال بالا اگر مساحت را با  $S$ ، محیط را با  $P$  و ارتفاع را با  $h$  نشان دهیم. رابطه جبری مساحت جانبی منشورهای بالا را بنویسید.

$$S_{\text{جانبی}} = P \times h$$

$$S_{\text{جانبی}} = 14 \times 5 = 70$$

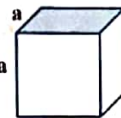


$$S_{\text{جانبی}} = 5a \cdot b$$



۱- مساحت جانبی شکل‌های زیر را پیدا کنید.

$$S_{\text{جانبی}} = 4a \cdot a$$



$$2ac + 2bc$$

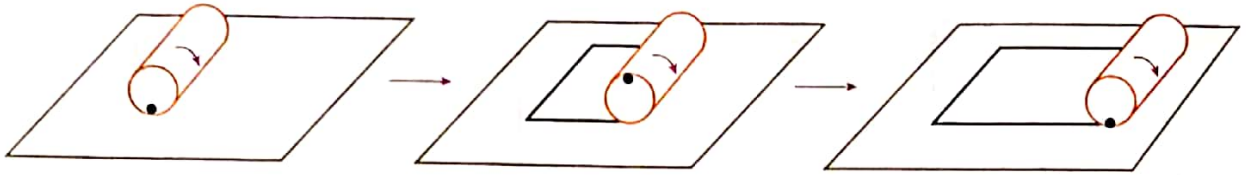
$$S_{\text{جانبی}} = c(2a + 2b) = 2c(a + b)$$

۲- ستونی به شکل منشور ۶ پهلوست که هر ضلع آن ۰/۲ متر و ارتفاع آن ۵ متر است. می‌خواهند بدنه جانبی این ستون را کاشی کاری کنند. چند متر مربع کاشی لازم است؟ ۲ متر مربع کافی است. متر مربع ۱ = ۰/۲ × ۵ = ۱

کاشی مربعی لازم است؟ ۲ متر مربع کافی است. متر مربع ۱ = ۰/۲ × ۵ = ۱

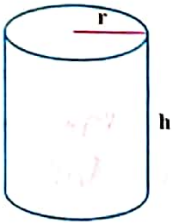


۱- یک استوانه را به شکل زیر روی یک صفحه می‌غلطانیم و ابتدا و انتهای کار را مشخص می‌کنیم.



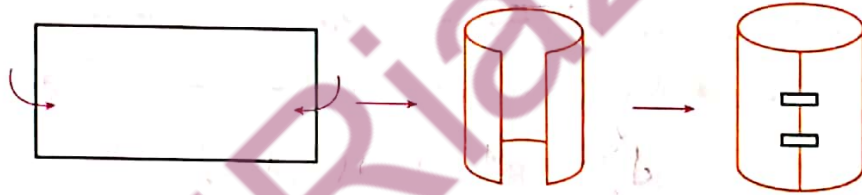
با این کار چه شکلی به دست می‌آید؟ مستطیل  
 طول و عرض آن چگونه به دست می‌آید؟  $\text{طول} = \text{محیط قاعده استوانه}$   
 مساحت این شکل چگونه به دست می‌آید؟  $\text{عرض} \times \text{طول} = S$   
 $\text{ارتفاع استوانه} = \text{عرض}$

۲- با توجه به سؤال بالا مساحت جانبی یک استوانه به ارتفاع  $h$  و شعاع قاعده  $r$  را با عبارت جبری نشان دهید.

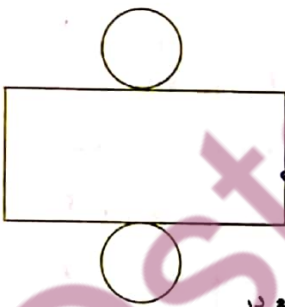


$$S = \text{محیط دایره} \times \text{ارتفاع} = 2\pi r h$$

۱- با توجه به سؤال بالا با یک مستطیل می‌توان یک سطح استوانه‌ای درست کرد.



این سطح استوانه را روی کاغذ بگذارید و دور آن خط بکشید. این دایره، قاعده استوانه است. چون استوانه ۲ قاعده دارد. ۲ دایره و یک مستطیل مساحت کل استوانه را تشکیل می‌دهند.

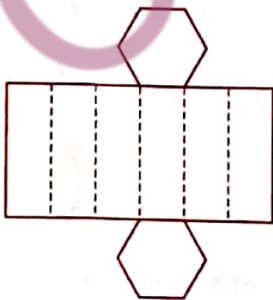


شکل مقابل را گسترده استوانه می‌گویند.

چه رابطه‌ای بین دایره و مستطیل در این گسترده وجود دارد؟ محیط دایره برابر با طول مستطیل است.

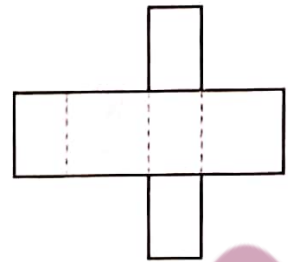
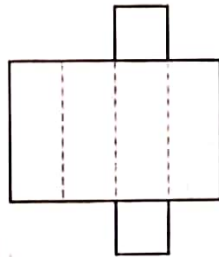
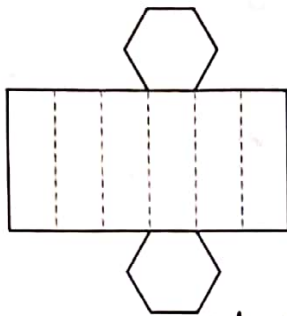
۲- گسترده یک منشور ۶ پهلو با قاعده ۶ ضلعی منتظم و گسترده یک مکعب مستطیل با قاعده مربع در

شکل‌های زیر رسم شده‌اند.



چه رابطه‌ای بین قاعده‌ها و مستطیل‌ها وجود دارد؟  
 محیط سش ضلعی با طول مستطیل برابر است  
 محیط مربع با طول مستطیل برابر است

۱- در شکل زیر گسترده چند منشور داده شده است. آنها را روی کاغذ بکشید و منشورها را درست کنید و به کلاس بیاورید.



در چه صورت گسترده شکل وسط به یک مکعب تبدیل می شود؟ ارتفاع با طول، قاعده برابر باشد

۲- یک غلتک روی زمین آسفالت شده باید ۴ بار غلت بزند تا سطح آن صاف شود.

اگر شعاع غلتک ۵۰ سانتی متر و ارتفاع استوانه آن ۱ متر باشد، برای آسفالت کردن سطح یک

کوچه به طول ۲۰ و عرض ۴ متر، این غلتک باید به طور تقریبی چند بار بچرخد؟

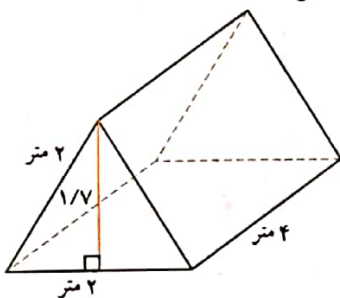
$$\text{تعداد دورها} = \frac{4 \times \text{مساحت کویچه}}{\text{مساحت جانبی غلتک}} = \frac{4 \times 20 \times 4}{2 \times 314 \times 1} = \frac{320}{628} \approx 102$$



۳- یک چرخ ماشین که کاملاً خیس شده است، با ۱۰ دور چرخیدن روی زمین جای خود را مشخص می کند تا خشک شود.

اگر این چرخ به ضخامت ۲۰ سانتی متر و قطر ۷۰ سانتی متر باشد، چه مساحتی از زمین را خیس خواهد کرد؟

۴- یک چادر مسافرتی به شکل مقابل است. چند متر پارچه برای ساخت آن به کار رفته است؟



حجم این چادر چقدر است؟  $V = \frac{1}{2} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}$

$$V = \frac{1}{2} \times (4 \times 4) + \frac{1}{2} \times (1.7 \times 4) = 27.4$$

۵- یک مخزن نفت به شکل استوانه ای است که شعاع قاعده آن ۳ متر و ارتفاعش ۵ متر است. می خواهیم بدنه خارجی و سقف

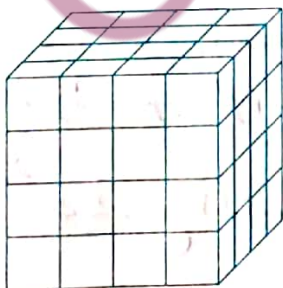
آن را رنگ بزنیم. اگر هزینه رنگ کردن هر متر مربع ۳۰۰۰ تومان باشد، برای رنگ کردن این مخزن چقدر باید هزینه کرد؟

۶- می خواهیم با مقوا مکعبی به ضلع ۱۰ cm بسازیم. چند سانتی متر مقوا به کار می رود؟  $10 \times 10 \times 10 = 1000 \text{ cm}^3$

۷- یک جعبه به شکل مکعب مستطیل به ابعاد ۳۰ و ۵۰ و ۴۰ سانتی متر را با کاغذ کادو پوشانده ایم. برای پوشاندن این جعبه

حداقل چند سانتی متر مربع کاغذ کادو لازم داریم؟ چرا در این مسئله حداقل کاغذ لازم خواسته شده است؟

۸- با مکعب های به ضلع ۱ واحد حجم مقابل را ساخته ایم. اگر تمام سطح های این حجم را



رنگ کنیم، چند مکعب رنگ نمی شوند؟ ۸ مکعب

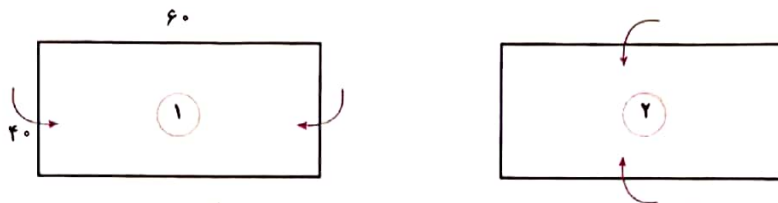
چند مکعب رنگ می شود؟ ۵۲ مکعب

چند مکعب ۲ وجهشان رنگ می شود؟ ۲۴ مکعب

چند مکعب ۳ وجهشان رنگ شده است؟ ۸ مکعب

# حجم و سطح

۱- یک مستطیل به طول و عرض داده شده را به دو صورت زیر لوله می کنیم تا استوانه به دست آید.



در هر حالت حجم استوانه را به دست آورید. مانند نمونه از رابطه های جبری کمک بگیرید. برای ساده تر شدن محاسبات عدد پی ( $\pi$ ) را ۳ در نظر بگیرید. در هر حالت ابتدا شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را تشخیص دهید.

$$V_1 = h_1 \times S_1 = h_1 \times r_1 \times r_1 \times \pi = 40 \times 10 \times 10 \times 3 = 12000$$

وقتی حول ضلع بزرگتر لوله می کنیم حجم بیشتری پیدا می کنیم

$$V_2 = h_2 \times S_2 = h_2 \times r_2 \times r_2 \times \pi = 40 \times \frac{20}{3} \times \frac{20}{3} \times 3 = 1000$$

با مقایسه حجم ها و با توجه به اینکه هر دو حجم با یک مستطیل ساخته شده است، چه نتیجه ای می گیرید؟ حجم در حالت اول بیشتر است.

۲- یک کارخانه تولید چای دو نوع بسته بندی به شکل های زیر ارائه می کند. هر دو نوع قوطی با ورق روی اندود (مصوب



فرهنگستان (galvanized) درست شده اند. در کدام یک چای بیشتری جا می گیرد؟

$$S_1 = 4 \times 10 \times 10 = 400 \text{ cm}^2$$

$$S_2 = 2(5 \times 5 \times 3) + (10 \times 2) = 450 \text{ cm}^2$$

$$V_1 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

$$V_2 = (5 \times 5 \times 3) \times 10 = 750$$

$$\frac{V_1}{S_1} = \frac{1000}{400} = \frac{5}{2}$$

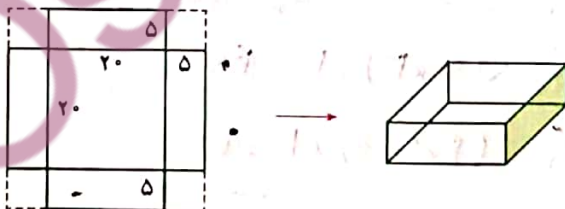
$$\frac{V_2}{S_2} = \frac{750}{450} = \frac{5}{3}$$

در کدام یک ورق روی اندود بیشتری برای ساخت قوطی به کار رفته است؟ در محاسبات خود عدد  $\pi$  را ۳ در نظر بگیرید.

باتوجه به عددهای بالا اگر شما مدیر کارخانه باشید، کدام نوع بسته بندی را انتخاب می کنید؟ چرا؟ سگلب

کدام نوع بسته بندی در حمل و نقل بهتر است و جای کمتری می گیرد؟ چرا؟ جعبه سگلب سگلب بهتر است چون فضای خالی بین بسته ها بوجود نمی آید.

برای بسته بندی شیرینی، جعبه هایی را درست می کنند. شکل گسترده این جعبه ها به صورت زیر است و پس از تا کردن مربع های کوچک گوشه ها روی هم قرار می گیرند و جعبه درست می شود.



$$V = 20 \times 20 \times 5 = 2000 \text{ cm}^3$$

با توجه به اندازه های داده شده، حجم (گنجایش) جعبه را پیدا کنید.

اگر به جای ۵ سانتی متر لبه ها را ۶ سانتی متر در نظر بگیریم، جعبه ای که با همین مقوا ساخته می شود، حجم بیشتری دارد یا کمتر؟

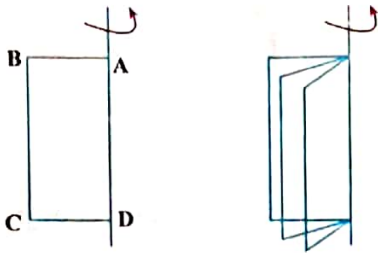
۷۹

$$V = 20 \times 20 \times 6 = 2400 \text{ cm}^3$$

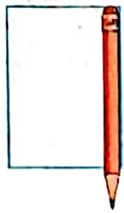
حجم بیشتر می شود.

مستطیل ABCD را حول محوری که از AD می‌گذرد، دوران می‌دهیم. شکل زیر نشان می‌دهد که مستطیل‌ها چگونه حرکت می‌کنند.

می‌کنند.



شما هم مانند شکل مقابل کاغذی را روی مدادی بچسبانید و آن را بچرخانید و حرکت مستطیل را تماشا کنید. با چرخاندن این مستطیل چه حجمی به وجود می‌آید؟ استوانه.



مشخصات آن حجم را بنویسید. AD ارتفاع استوانه است. CD شعاع قاعه آن است.

با حرکت یک سطح در فضا، حجم ساخته می‌شود. همین کار را برای شکل‌های دیگر نیز می‌توان انجام داد تا حجم‌های دیگری ساخته شوند. در سال‌های بعد در این مورد بیشتر توضیح داده خواهد شد.

۱- سطحی مثل شکل مقابل را حول محور d دوران می‌دهیم.

حجم چه شکلی ساخته می‌شود؟ می‌توانید با یک فرفره و چرخاندن آن حجم ایجاد شده را ببینید. کوب از این خاصیت در خراطی، تراشکاری و سفالگری برای ساختن حجم‌های مختلف استفاده می‌کنند.



۲- یک مستطیل را یک بار حول محور AD و یک بار حول محور AB دوران دهید. حجم حاصل از این دوران را حساب کنید.

$$h_1 = 4$$

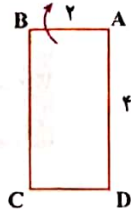
$$r_1 = 2$$

$$h_2 = 2$$

$$r_2 = 4$$

$$V_1 = (2 \times 2 \times \pi) \times 4 = 4\pi$$

$$V_2 = (4 \times 4 \times \pi) \times 2 = 8\pi$$



$$\text{راه دوم} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{4 \times 4 \times \pi \times 2}{2 \times 2 \times \pi \times 4} \times \frac{2}{4} = 2 \rightarrow V_2 = 2V_1$$

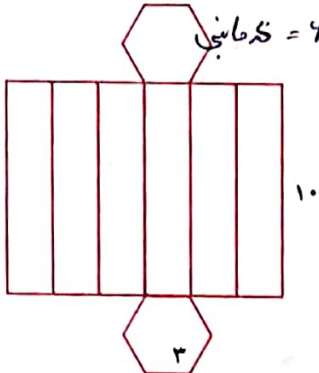
$$\text{قطر} = \frac{10}{3}$$

$$\text{شعاع} = \frac{10}{6} \quad r_2 = \frac{10}{2 \times 3} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(\frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \pi) \times 10}{(\frac{10}{3} \times \frac{10}{3} \times \pi) \times 5} = \frac{1}{2} \rightarrow V_1 = 2V_2$$

۱- یک مقوا به طول و عرض، ۵ × ۲۰ را به شکل استوانه به ارتفاع ۵ در آورده ایم. یک مقوای دیگر را نیز به ابعاد ۱۰ × ۱۰ را به شکل یک استوانه در آورده ایم. با توجه به اینکه مساحت مقواها در دو حالت برابر است، کدام استوانه حجم بیشتری دارد؟

۲- با شکل مقابل یک منشور درست کرده ایم. مساحت جانبی آن را پیدا کنید.  $S_{\text{جانبی}} = 4 \times 3 \times 10 = 120$



جواب ۳

$$\frac{x}{100} = \frac{2,5 \times 4 \times 1,5}{32} \Rightarrow x = \frac{2,5 \times 4 \times 1,5 \times 100}{32} = \frac{250}{1} \approx 44,9\%$$

۳- یک صابون مکعب مستطیل شکل به حجم ۳۲ سانتی متر مکعب پس از چند بار مصرف، کوچک شده و به ابعاد  $2\frac{1}{4}$  و ۴ و  $1\frac{1}{4}$  سانتی متر تبدیل شده است. چند درصد این صابون استفاده شده است؟

$$100 - 44,9 = 55,1$$

۴- یک استوانه که با یک مقوا به طول ۲۰ سانتی متر و عرض ۱۰ سانتی متر ساخته شده به طور تقریبی چه حجمی دارد؟ (ارتفاع استوانه ۲۰ است.)

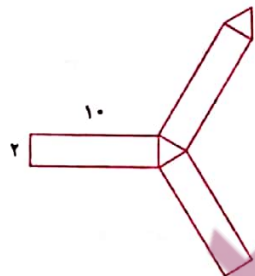
$$V = 20 \times 10 \times 20 = 4000 \text{ cm}^3$$

۵- اگر یک حجم از بالا و سمت راست و روبه رو به صورت زیر دیده شود، آن حجم را رسم کنید.

روبه رو

راست

بالا

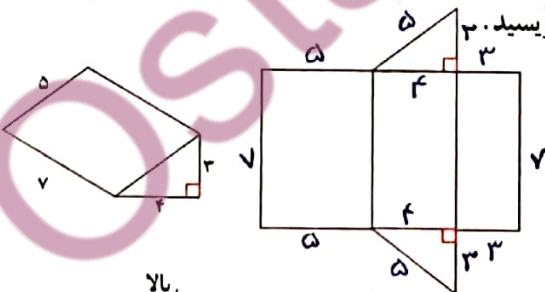


۶- شکل مقابل گسترده یک منشور را نشان می دهد.

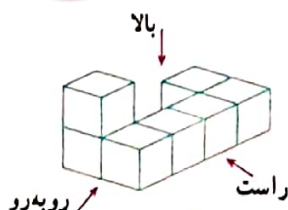
$$S_{\text{جانبی}} = (2 \times 3) \times 10 = 60 \text{ cm}^2$$

مساحت جانبی منشور را پیدا کنید.

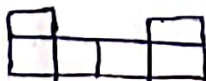
۷- با توجه به حجم منشور و ابعاد آن، اندازه ضلع های گسترده آن را بنویسید.



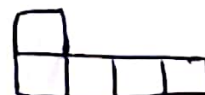
۸- حجم مقابل از راست، بالا و روبه رو چگونه دیده می شود؟



UL



روبه رو



۸۱

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جملات خود آنها را تعریف کنید. برای هر کدام مثال بزنید.

- حجم هندسی
- حجم منشوری
- مساحت جانبی
- مساحت کل
- گسترده

در این فصل روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود یک خلاصه تهیه کنید.

- انواع حجم‌های هندسی
- حجم مخروطی و حجم منشوری
- قاعده، وجه، یال و رأس حجم‌های منشوری
- رابطه پیدا کردن حجم‌های منشوری
- رابطه پیدا کردن مساحت کل حجم‌های منشوری
- رابطه پیدا کردن مساحت جانبی حجم‌های هندسی
- ساختن یک حجم به کمک گسترده آن
- دوران سطح حول یک محور و ساختن حجم
- مقایسه حجم‌هایی که با یک سطح مشخص درست شده‌اند.

کاربرد

کاربرد این فصل در زندگی روزمره فراوان است. در دنیایی از اجسام زندگی می‌کنیم و نیاز داریم حجم‌های مختلف را اندازه بگیریم و برای ساختن حجم‌ها نیز از سطح‌ها (کاغذ، مقوا، ورق و ...) استفاده می‌کنیم.

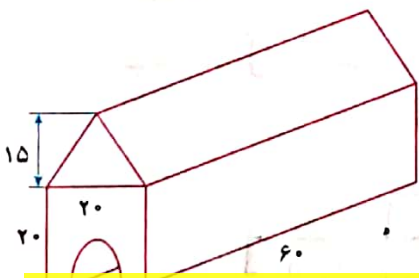
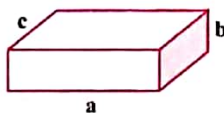
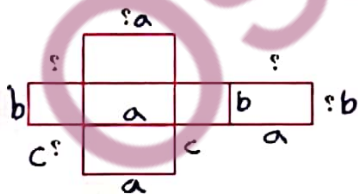
تمرین‌های ترکیبی

در صورتی که تمرین‌های ترکیبی زیر را توانستید انجام دهید، مطمئن می‌شوید که این فصل را به خوبی آموخته‌اید.

۱- حجم، مساحت جانبی و مساحت کل شکل‌های زیر را به دست آورید.

استوانه به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۲ منشور چهار پهلو با قاعده مربع به ضلع ۲ و ارتفاع ۲۰

۲- الف) با توجه به شکل مکعب مستطیل اندازه ضلع‌های خواسته شده روی گسترده آن را مشخص کنید.



ب) حجم شکل مقابل را به دست آورید.

$$V = \frac{15 \times 20}{2} \times 60 = 9000$$

$$V = 20 \times 20 \times 40 - \frac{5 \times 5 \times 3 \times 40}{2} = 24000 - 2250 = 21750$$

۸۲

$$V = 9000 + 21750 = 30750$$