

توان و جذر

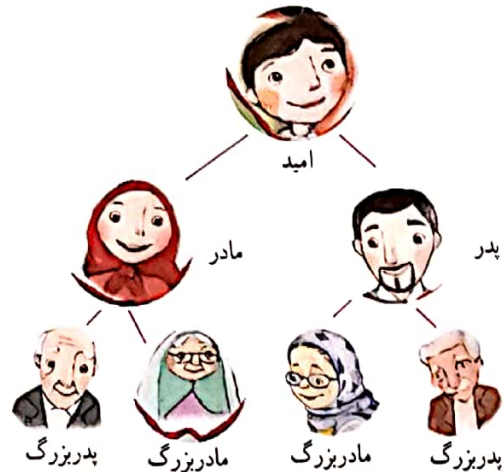
فصل ۷



- تعریف توان
- محاسبه عبارت‌های توان‌دار
- ساده کردن عبارت‌های توان‌دار
- جذر و ریشه

وقتی یک باخته (مصوب فرهنگستان Cell, cellule) به باخته‌های دیگر تبدیل می‌شود و این عمل تکرار می‌گردد، در مدت کوتاهی تعداد باخته‌ها به سرعت افزایش پیدا می‌کنند. رشد تعداد باخته‌ها به صورت توانی است. شاید به همین علت است که جراحی پوست در مدت کوتاهی ترمیم می‌شود و باخته‌های جدید جایگزین باخته‌های مرده می‌شوند.

تعریف توان



۱- امید می‌داند که نوهٔ چهار نفر است. این چهار نفر پدر بزرگ‌ها و مادر بزرگ‌های امیدند. او می‌خواهد بداند که نتیجهٔ چند نفر است؟ (به فرزند نوه، نتیجه می‌گویند). امید برای پاسخ سؤال خود شکل مقابل را کشید.

الف) شکل را کامل کنید و با استفاده از آن بگویید که امید نتیجهٔ چند نفر است؟

ب) به نظر شما تعداد افرادی که امید نیرهٔ آنها است، چند نفرند؟

(به فرزند نتیجه، نیره می‌گویند).

ج) جدول مقابل را کامل کنید. برای محاسبهٔ تعداد، از ماشین حساب

نیز می‌توانید کمک بگیرید.

تعداد	روش محاسبه	بستگان امید
۲	۲	پدر و مادر
۴	2×2	پدربزرگ و مادربزرگ
۸	$2 \times 2 \times 2$	نسل سوم قبل از امید
۱۶	$2 \times 2 \times 2 \times 2$	نسل چهارم قبل از امید
۱۲۸	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	نسل هفتم قبل از امید

۲- یک کاغذ را چند بار تا می‌زنیم و هر بار تعداد قسمت‌هایی را که کاغذ تقسیم شده است، می‌شماریم. چه الگویی در تعداد

قسمت‌ها می‌بینید؟



تعداد تا	.	۱	۲	۳	۴
تعداد قسمت‌ها	۱	۲	2×2	$2 \times 2 \times 2$	$2 \times 2 \times 2 \times 2$

اگر تا زدن را به همین ترتیب ادامه دهیم، در نای هشتم چند قسمت خواهیم داشت؟ $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$

در نای دهم چند قسمت خواهیم داشت؟ 1024

در نای n م چند قسمت خواهیم داشت؟

بار n

چه راهی برای خلاصه کردن عبارت‌های بالا پیشنهاد می‌کنید؟ به جای $2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2$

انگیز عدد 2^n را چند بار بنویسیم. n بار بنویسیم و تعداد آن را با عدد n توان مشخص کنید. (با توجه به اینکه در عمل، تا کردن کاغذ تا چند مرحله بیشتر ممکن نخواهد بود، برای یافتن جواب‌ها از شکل‌های داده شده استفاده کنید.)

عبارتی مانند $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ را در ریاضیات برای ساده‌تر شدن به صورت 2^5 می‌نویسیم و آن را چنین می‌خوانیم: ۲ به توان ۵.

در عبارت 2^5 ، ۲ را پایه و ۵ را توان می‌نامیم. درست شبیه همان کاری که در ساده کردن و خلاصه کردن جمع انجام می‌دادیم.

$$(2+2+2+2+2 = 5 \times 2)$$

عبارت	شکل ساده شده	خوانده می شود	حاصل
7×7	7^2	هفت به توان ۲	۴۹
$7 + 7$	2×7	دو ضرب در ۷	۱۴
$2/5 \times 2/5 \times 2/5$	$2/5^3$	۲ بر ۵ به توان ۳	$151/125$
$1 \times 1 \times 1$	1^3	۱ به توان ۳	۱
$1 + 1$	2×1	۲ ضرب در ۱	۲
$\frac{5}{3} \times \frac{5}{3}$	$(\frac{5}{3})^2$	$\frac{5}{3}$ به توان ۲	$\frac{25}{9}$

۱- جدول مقابل را کامل کنید.

پس از آن عبارت های زیر را به صورت ساده شده بنویسید.

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3$$

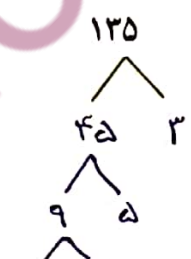
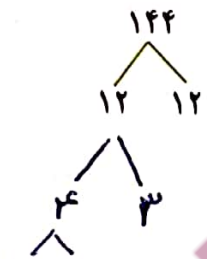
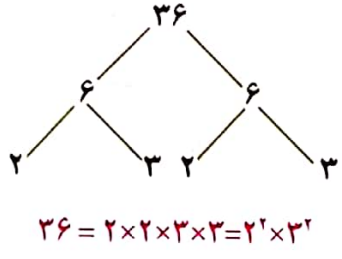
$$9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^5$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^9$$

$$a \times a \times a = a^3$$

$$b \times b = b^2$$

۲- عددهای داده شده را مانند نمونه تجزیه کنید و به صورت عدد توان دار بنویسید.



۳- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟ در صورت امکان موارد نادرست را اصلاح کنید.

$4^2 = 64$ نادرست

$5^2 = 5 \times 2$ نادرست

$(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$ درست

$9^2 = 18$ نادرست

$(\frac{1}{3})^2 = \frac{4}{81}$ نادرست

$\frac{3^2}{5} = \frac{9}{25}$ نادرست

$5^2 = 25$ نادرست

$(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{4}$ نادرست

۴- تساوی ها را کامل کنید.

$$a \times a \times a \times a = a^4$$

$$b^2 = b \times b \times b$$

$$(\frac{a}{b})^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{a \times a \times a}{b} = \frac{a^3}{b}$$

$$x \times x = x^2$$

$$(y+x)(y+x) = (x+y)^2$$

$(ab)^2 = (ab) \times (ab) = a^2 b^2$

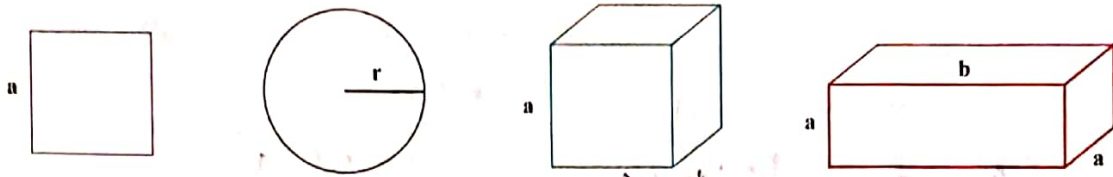
$$\frac{x \times x \times x}{y \times y \times y \times y \times y} = \frac{x^3}{y^5}$$

۵- در تکثیر یاخته ها، هر یاخته به ۲ یاخته تقسیم می شود. دوباره هر کدام از آن یاخته ها خودشان به ۲ یاخته تقسیم می شوند و این

کار ادامه پیدا می کند. جدول زیر را کامل کنید و حاصل را به صورت عدد توان دار بنویسید.

مرحله تکثیر	۱	۲	۳	۴	...	۷	...	n
تعداد یاخته	۲	2×2	$2 \times 2 \times 2$	$2 \times 2 \times 2 \times 2$...	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$...	
به صورت توان دار	2^1	2^2	2^3	2^4		2^7		2^n

۱- با توجه به شکل‌های زیر مساحت و حجم‌های خواسته شده را با عبارات توان‌دار جبری نمایش دهید.

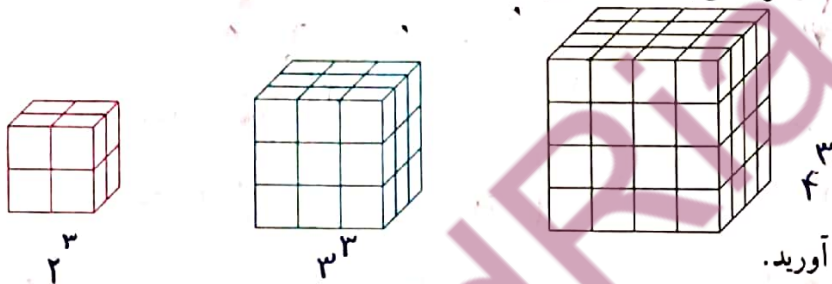


$S = a \times a = a^2$ $S = 2/14 \times r \times r = 2/14 \times r^2$ $V = a \times a \times a = a^3$ $V = a \times b \times a = a^2 b$

۲- جمله‌های کلامی زیر را به صورت عبارت جبری نشان دهید.

- هر عدد به توان یک برابر خودش می‌شود: $a^1 = a$
- یک به توان هر عدد برابر یک می‌شود: $1^n = 1$
- مجذور هر عدد؛ یعنی آن عدد به توان ۲: $a^2 = \text{مجذور } a$
- مکعب یک عدد؛ یعنی آن عدد به توان ۳: $x^3 = \text{مکعب } x$
- صفر به توان هر عدد به جز صفر برابر است با: $x^0 = 1, x \neq 0$

۳- تعداد مکعب‌های کوچک $1 \times 1 \times 1$ را در هر شکل با یک عدد توان‌دار نشان دهید.



n^3 مکعب n تایی

۴- حاصل هر عبارت توان‌دار را به دست آورید.

$2^2 = 2 \times 2 = 4$ $3^2 = 3 \times 3 = 9$ $4^2 = 4 \times 4 = 16$ $5^2 = 5 \times 5 = 25$ $6^2 = 6 \times 6 = 36$ $7^2 = 7 \times 7 = 49$
 $8^2 = 8 \times 8 = 64$ $9^2 = 9 \times 9 = 81$ $10^2 = 10 \times 10 = 100$ $11^2 = 11 \times 11 = 121$ $12^2 = 12 \times 12 = 144$

مکعب یک = $1^3 = 1$ مکعب دو = $2^3 = 8$ مجذور یک = $1^2 = 1$ مجذور دو = $2^2 = 4$

$\frac{2^3}{5^2} = \frac{2 \times 2 \times 2}{5 \times 5} = \frac{8}{25}$ $(\frac{3}{4})^2 = \frac{3 \times 3}{4 \times 4} = \frac{9}{16}$ $\frac{2^2}{7} = \frac{2 \times 2}{7} = \frac{4}{7}$ $\frac{14}{5} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{5} = \frac{14}{5}$ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ $\frac{1}{100} = \frac{1}{100}$ $1/1^2 = 1, 1 \times 1 = 1, 2/1^2 = 2, 1 \times 2, 1 = 2, 2/5^2 = 2, 1 \times 2, 1 = 4, 4/5^2 = 4, 5 \times 4 = 20$

۵- مقدار عبارت 3^n را به ازای عددهای داده شده به دست آورید.

n	۱	۲	۳	۴
3^n	$3^1 =$	$3^2 =$	$3^3 = 27$	$3^4 = 81$

۶- حاصل عددهای $2^5, 2^4, 2^3, 2^2, 2^1$ را به دست آورید و به صورت نمودار ستونی در دفتر خود رسم کنید (باید واحد مناسبی)

برای محور عمودی رسم کنید. در مورد شیوه رسم هر ستون توضیح دهید. آیا می‌توانید 2^6 یا 2^7 را در دفتر خود رسم کنید؟ چرا؟

۷- عدد 11^{12} به طور تقریبی چند رقمی است؟ چرا؟ 11^{12} به طور تقریبی 13^3 رقم است.

ترتیب انجام عملیات را در دوره دبستان آموخته‌اید. با توجه به درس توان، ترتیب انجام دادن عملیات مختلف ریاضی به صورت
 (۱) پوانتت (۲) توان (۳) ضرب و تقسیم (۴) جمع و تفریق انجام می‌شود.
 با کامل کردن مراحل محاسبه عبارت و همچنین ترتیب انجام عملیات و نحوه نوشتن راه حل توجه کنید.

$$\frac{2 \times 4 + 10}{9^2 \cdot 5^2} = \frac{8 \times 4 + 10}{81 \cdot 25} = \frac{32 + 10}{81 \cdot 25} = \frac{42}{2025} = \frac{3}{167}$$

محاسبه توان ها محاسبه ضرب محاسبه جمع و تفریق ساده کردن

محاسبه های بعدی را کامل کنید.

$$2 \times 3^2 - (2^2 + 2) = 2 \times 9 - (4 + 2) = 18 - 6 = 12$$

$$\frac{10 \div (8 - 6) + 9 \times 4}{2^5 + 3^5} = \frac{10 \div 2 + 36}{32 + 243} = \frac{5 + 36}{275} = \frac{41}{275}$$

۱- حاصل عبارت‌ها را به دست آورید.

$$2^5 + 3^2 = 32 + 9 = 41 \quad 2^5 \times 3^2 = 32 \times 9 = 288 \quad 2^5 - 3^2 = 32 - 9 = 23$$

$$2^5 \div 8 = 32 \div 8 = 4 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2+3}{8} = \frac{5}{8} \quad 5^2 - 5 \times 2 = 25 - 10 = 15$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{4}{25} = \frac{625 - 16}{100} = \frac{609}{100} \quad \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4+2+1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$2^2 - 3^2 + 1^5 = 4 - 9 + 1 = -4 \quad 5^1 + 1^5 + 0^5 = 5 + 1 + 0 = 6$$

۲- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

$(2+2)^2 = 2^2 + 2^2$ نادرست

$(4 \times 3)^2 = 3^2 \times 4^2$ درست

$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{22}{32}$ نادرست

$5 \times 6^2 = (6 \times 5)^2$ نادرست

$2^2 \times 5^2 = 10^2$ نادرست

$2^2 \times 2^2 = 2^4$ درست

۳- روش محاسبه را توضیح دهید.

$$2^8 + 8^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 + 8 \times 8$$

ابتدا حاصل هر کدام را به دست می‌آوریم، سپس با هم جمع می‌کنیم

۱- مانند نمونه عبارات‌های توان‌دار را حساب کنید.

$$2^2 = 2 \times 2 \times 2 = 8 \quad (-2)^2 = (-2) \times (-2) = +4 \quad (-2)^3 = -8$$

$$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)^0 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$$

با توجه به توان‌ها و حاصل عبارات‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
 الگویی عدد منفی به توان عدد زوج برسد، حاصل عددی مثبت خواهد بود و الگویی عدد منفی به توان فرد برسد، حاصل عددی منفی به توان عددی زوج برسد، حاصل عددی مثبت خواهد بود و الگویی عدد منفی به توان فرد برسد، حاصل عددی منفی خواهد بود.
 ۲- عبارات‌های زیر را حساب کنید.

$$-2^3 = -2 \times 2 \times 2 = -8 \quad (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

$$-2^4 = -(2 \times 2 \times 2 \times 2) = -16 \quad (-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$$

۳- الگوی عددی زیر را کامل کنید.

$$2^6 \rightarrow 2^5 \rightarrow 2^4 \rightarrow 2^3 \rightarrow 2^2 \rightarrow 2^1 \rightarrow 2^0$$

$$64 \rightarrow 32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

ارتباط بین عددهای توان‌دار و حاصل آنها را توضیح دهید. از تقسیم حاصل بی‌عدد توان ۲، عدد بگیری به دست می‌آید.
 به نظر شما در جای خالی چه عددی باید نوشت؟ $2^0 = 1$

۱- حاصل عبارات‌های زیر را به دست آورید.

$$-3^2 = -(3 \times 3) = -9 \quad (-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25 \quad -1^5 = -(1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1) = -5$$

$$(-1)^0 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)^0 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times 1 = -1 \quad 7^0 = 1$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^0 = 1 \quad (-9)^0 = 1 \quad 0^0 + 1^0 = 0 + 1 = 1 \quad 4 + 2^0 = 4 + 1 = 5$$

$$-1^5 = -(1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1) = -5 \quad 2^2 = 2 \times 2 \times 2 = 8 \quad (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8 \quad 5^0 = 1$$

۲- در جای خالی علامت < یا = یا > بگذارید.

$$2^0 < 2^1 \quad 7^0 < 7^1 \quad \left(\frac{3}{5}\right)^2 < 2^0 \quad (-2)^0 = (-2)^1$$

۱- کدام درست و کدام نادرست اند؟ علت نادرستی را توضیح دهید.

درست $(-\frac{2}{3})^0 + (\frac{1}{3})^0 > 1$ درست $(\frac{1}{2})^0 > (-\frac{1}{2})^2$ نادرست $(3+2)^0 = 2^0 + 3^0$

درست $4^0 < (-2)^2$ نادرست $2^0 + 3^0 + 5^0 = 1$ نادرست $4 + 2^0 = 6$

۲- الف) حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$2 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 2 \times 10^0 = 2000 + 400 + 2 = 2472$$

$$5 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 1 \times 10^0 + 9 \times 10^0 = 5000 + 0 + 10 + 9 = 5019$$

ب) با توجه به تمرین‌های بالا عددهای زیر را به صورت گسترده و سپس به صورت توانی نمایش دهید.

$$4225 = 4000 + 200 + 20 + 5 = 4 \times 1000 + 2 \times 100 + 2 \times 10 + 5$$

$$9207 = 9000 + 200 + 0 + 7 = 9 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 7 \times 10^0$$

۳- به جای n عددهای ۱ تا ۵ را قرار دهید و دو عبارت 4^n و n^4 را با هم مقایسه کنید. برای محاسبات از ماشین حساب استفاده کنید.

n	۱	۲	۳	۴	۵
4^n	$4^1 = 4$	$4^2 = 16$	$4^3 = 64$	$4^4 = 256$	$4^5 = 1024$
n^4	$1^4 = 1$	$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$5^4 = 625$

برای $n=10$ کدام یک بزرگ‌تر از دیگری است؟

$$\left. \begin{array}{l} 4^{10} = 1024 \times 1024 = 1048576 \\ 10^4 = 10000 \end{array} \right\} 4^{10} > 10^4$$

۴- در بعضی از ماشین حساب‌ها کلید توان به صورت زیر استفاده می‌شود. عددهای توان‌دار را محاسبه می‌کنند. برای مثال

2^3 به صورت زیر محاسبه می‌شود. حالا شما عددهای مختلف را در ماشین حساب وارد و حاصل آنها را ملاحظه کنید. چه راه دیگری

برای پیدا کردن جواب 2^3 وجود دارد؟



۵- حاصل عبارت‌ها را به ازای عددهای داده شده به دست آورید.

$$a^2 - b^2 + ab \quad a = -2 \quad b = 2 \Rightarrow (-2)^2 - (2)^2 + (-2) \times (2) = 4 - 4 - 4 = -4$$

$$a^2 - 2b^2 + a^2b \quad a = 1 \quad b = -2 \Rightarrow 1^2 - 2 \times (-2)^2 + 1^2 \times (-2) = 1 - 8 + (-2) = -9$$

ساده کردن عبارت‌های توان دار

فعالین

۱- زهره می‌خواست مسئله‌هایی را که معلم برای تمرین تعیین کرده بود، حل کند. معلم ریاضی خواسته بود که دانش‌آموزان مساحت مستطیل به طول 2^4 و عرض 2^3 را به دست آورند. زهره به صورت زیر عمل کرد و عبارت‌ها را به صورت ضرب نوشت.

$$S = a \times b = 2^4 \times 2^3 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{مرتبه 4}} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{\text{مرتبه 3}}$$

سیما با مشاهده عبارت زهره به او گفت: هفت تا ۲ ضرب شده است. پس عبارت تو با 2^7 برابر است. نتیجه‌گیری سیما را با یک تساوی نشان دهید.

$$5^2 \times 5^4 = \underbrace{5 \times 5}_{\text{مرتبه 2}} \times \underbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5}_{\text{مرتبه 4}} = 5^6$$

۲- مانند نمونه عمل کنید.

$$4^2 \times 4^3 = \frac{4 \times 4}{\text{مرتبه 2}} \times \frac{4 \times 4 \times 4}{\text{مرتبه 3}} = 4^5$$

$$x^2 \times x^3 = x^5$$

$$7^2 \times 7^2 = 7^4$$

$$a^2 \times a^4 = a^6$$

با توجه به تساوی‌های بالا یک رابطه برای ساده کردن ضرب عبارت‌های توان دار با پایه‌های مساوی بنویسید.

۳- با توجه به رابطه بالا، مانند نمونه عبارت توان دار را به صورت ضرب ۲ یا چند عبارت توان دار بنویسید.

$$2^7 = 2^5 \times 2^2$$

$$2^7 = 2^4 \times 2^3$$

$$2^7 = 2^2 \times 2^2 \times 2^3$$

$$5^1 = 5^2 \times 5^2$$

$$5^1 = 5^4 \times 5^5$$

$$5^1 = 5^3 \times 5^3 \times 5^3$$

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$5^2 \times 5^2 = 5^4$$

$$(-2)^2 \times (-2)^2 = (-2)^4$$

$$(-4)^1 \times (-4)^5 = (-4)^6$$

$$7^2 \times 7^1 = 7^3$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$1/5^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

۲- با باز کردن عبارت توان دار، جواب را ساده‌تر کنید و محاسبات را مانند نمونه پاسخ دهید.

$$3^2 = 3^1 \times 3^1 = 9 \times 9 = 9^2$$

$$2^6 = 2^3 \times 2^3 = 8 \times 8 = 4^2 \quad 4^2 = 4^2 \times 4^2 = 14 \times 14 = 14^2 \quad 5^2 = 5^2 \times 5^2 = 25 \times 25 = 25^2$$

۳- اگر $2^1 = 1024$ باشد حاصل 2^{12} را به دست آورید.

$$2^{12} = 2^1 \times 2^1 \times 2^1 \times 2^1 \times 2^1 \times 2^1 \times 2^1 \times 2^1 \times 2^1 \times 2^1 \times 2^1 \times 2^1 = 1024 \times 4 = 4096$$

کار در کلاسی

۱- مانند نمونه عبارت‌ها را باز کنید و دوباره به صورت عدد توان‌دار بنویسید.

$$2^2 \times 5^2 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 10 \times 10 = 10^2$$

$$3^2 \times 4^2 = 3 \times 3 \times 4 \times 4 = 12 \times 12 = (12)^2 \left(\frac{12}{1}\right)^2 \times 5^2 = \frac{12}{1} \times \frac{12}{1} \times \frac{5}{1} \times \frac{5}{1} = \frac{12 \times 12 \times 5 \times 5}{1 \times 1 \times 1 \times 1} = \frac{12^2 \times 5^2}{1} = (12 \times 5)^2 = (60)^2$$

$$a^2 \times b^2 = \overbrace{a \times a} \times \overbrace{b \times b} = ab \times ab = (ab)^2 \quad x^2 \times y^2 = \overbrace{x \times x} \times \overbrace{y \times y} = xy \times xy = (xy)^2$$

با مقایسه تساوی‌های یک قانون کلامی برای ساده کردن ضرب عبارت‌های توان‌دار با توان‌های مساوی به دست آورید.

۲- با قانونی که به دست آوردید، عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$2^2 \times 3^2 = 6^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \times 3^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

$$(-2)^5 \times (-1)^5 = 2^5$$

$$(-2)^5 \times 3^5 = (-6)^5$$

$$x^2 \times y^2 = (xy)^2$$

$$(ab)^2 = a^2 \times b^2$$

$$6^5 = (2 \times 3)^5 = 2^5 \times 3^5$$

۳- به تساوی‌های روبه‌رو توجه کنید.

مانند نمونه‌های بالا عددهای توان‌دار زیر را باز کنید.

$$10^5 = 2^5 \times 5^5$$

$$10^2 = 2^2 \times 5^2$$

$$12^4 = 2^4 \times 3^4$$

$$(xy)^{10} = x^{10} \times y^{10}$$

$$(xyz)^2 = x^2 \times y^2 \times z^2$$

$$30^5 = 2^5 \times 3^5 \times 5^5$$

۱- مانند نمونه عبارت‌های توان‌دار را تا جایی که ممکن است ساده کنید.

$$5^2 \times 5^2 \times 7^6 = 5^4 \times 7^6 = 35^4$$

$$7^2 \times 7^2 \times 9^5 = 7^4 \times 9^5 = 47^5$$

ضرب با پایه‌های مساوی

$$2^2 \times 6^2 \times 3^2 \times 4^2 = 12^2 \times 12^2 = 12^4$$

$$(2^5 \times 3^2 \times 5) \times (2^2 \times 3^5 \times 5^6) = 2^7 \times 3^7 \times 5^7 = 30^7$$

$$2^a \times 2^b = 2^{a+b}$$

۲- عبارت توان‌دار مقابل را تا جایی که ممکن است، ساده کنید.

به جای a و b عددهای ۳ و ۵ و یک بار ۴ و ۷ قرار دهید و تساوی‌ها را به صورت عددی بنویسید.

$$2^3 \times 2^5 = 2^8$$

$$2^4 \times 2^7 = 2^{11}$$

۱- در تساوی های زیر به جای a و b و c عددهای مختلفی قرار دهید و تساوی های عددی بسازید.

$a^b \times a^c = a^{b+c}$ $a^c \times b^c = (a \times b)^c$ $a=2$
 $2^3 \times 2^4 = 2^7$ $2^4 \times 3^4 = 4^4$ $b=3$
 در نظریه سوم $c=4$

۲- با استفاده از تجزیه به عددهای اول، هر عدد را به صورت توان دار بنویسید.

$121 = 11 \times 11 = 11^2$ $256 = 2^8$ $441 = 3^2 \times 7^2$ $10000 = 2^4 \times 5^4$

۳- مسئله هایی طرح کنید که پاسخ آنها: الف) 2^3 ب) 2×3 ج) 5^2 باشد.
 الف - حجم مکعبی با ضلع ۲ را حساب کنید ب - مساحت مستطیلی با عرض ۲ و طول ۳ را حساب کنید
 ج - مساحت یک مربع به ضلع ۵ را حساب کنید.

۴- عددهای توان دار را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.
 $2^0 < 8^1 < 9^2 < 3^5 < 4^{10}$ و 9^2 و 8^1 و 6^0 و 4^{10} و 3^5

۵- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟ توضیح دهید.

$4^2 \times 4^2 = 4^{12}$ نادرست $3^2 \times 2^2 = 6^2$ نادرست $4^2 + 2^2 = 6^2$ نادرست
 $4^2 \times 4^2 = 4^7$ درست $3^2 \times 2^2 = 6^2$ درست $4^1 + 3^1 = 7^1$ درست

$(-2^3) \times 7^2 = (-14)^2$ درست $(\frac{2}{3})^2 \times (\frac{2}{3})^7 = (\frac{2}{3})^9$ درست

۶- کدام یک از عبارت های زیر $(\frac{2}{3})^2$ را نشان می دهد؟

$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ ✓ $\frac{2+2+2}{3}$ $\frac{3 \times 2}{3}$ $\frac{2}{3} \times 3$ $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$ $\frac{2}{3} + 3$

۷- به جدول زیر توجه کنید و با توجه به آن سوال ها را جواب دهید.

۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸
۱	۲	۱۶	۶۴	۲۵۶	۱۰۲۴	۴۰۹۶	۱۶۳۸۴	۶۵۵۳۶

$4^4 \times 4^1 = 4^{14}$ حاصل عبارت 4096×65536 را به صورت توان دار بنویسید.

تعداد رقم های 4^{10} را پیش بینی کنید. فکر می کنید 4^2 چند رقمی می شود؟ چرا؟ 4^7 رقمی
 ۸- جاهای خالی را کامل کنید. چه الگویی مشاهده می کنید؟ یک تساوی دیگر بنویسید.

$3^2 - 1^2 = (2)^2$ $6^2 - 3^2 = (3)^2$ $10^2 - 6^2 = (4)^2$ $15^2 - 10^2 = (5)^2$ $21^2 - 15^2 = (6)^2$

آیا این الگو برای $3^2 - 1^2 = 2^2$ درست است؟ حتماً زیر تساوی برقرار نیست.

۹- در جای خالی یکی از عمل های + یا - یا \times یا \div را قرار دهید تا تساوی برقرار باشد.

$2^5 \div 8 = 4$ $3^2 + 7^2 = 58$ $(-7)^0 + 8^1 = 3^2$ $2^6 \div 16 = 2^0 \times 2^2$

جذر و ریشه

۱- مساحت یک زمین بازی کودکان که به شکل مربع است، برابر ۱۴۴ متر مربع است. طول ضلع این مربع چند متر است؟ $۱۴۴ = a^2 \Rightarrow a = ۱۲$ ضلع مربع

۲- یک شرکت برای محوطه‌سازی، سنگ‌های مرمر در اندازه‌های ۲۵×۵۰ سانتی‌متر خریده است. این شرکت در مجموع ۸۱ متر مربع سنگ برای این کار خریده است. ضلع بزرگ‌ترین مربعی که می‌توان با این سنگ‌ها ساخت چند متر است؟ اگر ۲ سنگ کنار هم قرار بگیرد مربعی به ضلع ۵۰ سانتی‌متر ساخته می‌شود با ۸ سنگ مربعی به طول ۱۰۰ سانتی‌متری می‌سازیم. یا تو با این ۸۱ متر مربع ۸۱ سانتی‌متر مربع است. بزرگ‌ترین مربع به ضلع ۸۰۰ در جدول زیر طول ضلع تعدادی مربع و مساحت آنها داده شده است. جاهای خالی را کامل کنید.

طول ضلع	۳	۴	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	۹	$\frac{7}{4}$	$\frac{11}{6}$	۲۰	$\frac{1}{9}$
مساحت مربع	۹	۱۶	۲,۲۵	$\frac{4}{25}$	۸۱	۵۴,۷۷	$\frac{121}{36}$	۴۰۰	$\frac{1}{81}$

۴- در الگوی عددی زیر آیا عدد ۱۵ قرار می‌گیرد؟ چرا؟ حیرت‌زنا! زیرا هیچ عدد طبیعی وجود ندارد. که بتوان آن برسد ۱۵ به دست آید.

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots, n^2$$

با کمک ماشین حساب و راهبرد حدس و آزمایش، عددی پیدا کنید که بتوان به جای x قرار داد.

$$x^2 = 15 \Rightarrow x \approx 3,9$$

در تساوی $۳^۲ = ۹$ ، عدد ۹ را توان دوم یا مجذور عدد ۳ و عدد ۳ را نیز ریشه دوم یا جذر ۹ می‌نامند. آیا ۳- نیز

ریشه دوم ۹ است؟ چرا؟

جدول زیر را کامل کنید.

عدد	۹	۲۵	$\frac{1}{4}$	۴۹
ریشه دوم	۳ و -۳	۵ و -۵	$\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$	۷ و -۷
رابطه ریاضی	$(-۳)^۲ = ۹$ $۳^۲ = ۹$	$(-۵)^۲ = ۲۵$ $۵^۲ = ۲۵$	$(-\frac{1}{2})^۲ = \frac{1}{4}$ $(\frac{1}{2})^۲ = \frac{1}{4}$	$(-۷)^۲ = ۴۹$ $۷^۲ = ۴۹$

توان دوم یا مجذور عدد ۳ را با 3^2 و توان دوم یا مجذور عدد ۳- را با $(-3)^2$ نمایش می‌دهیم. برای نمایش ریشه دوم مثبت از نماد $\sqrt{\quad}$ (بخوانید رادیکال) استفاده می‌کنیم.
 ریشه‌های دوم عدد ۹ را با $\sqrt{9}$ و $-\sqrt{9}$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر $\sqrt{9} = 3$ و $-\sqrt{9} = -3$

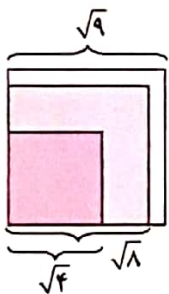
۱- تساوی‌ها را کامل کنید.

$$\begin{array}{cccc} \sqrt{16} = 4 & -\sqrt{16} = -4 & \sqrt{36} = 6 & -\sqrt{81} = -9 \\ \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10} & -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5} & \sqrt{49} = 7 & \sqrt{\frac{1}{81}} = \frac{1}{9} \end{array}$$

۲- کدام یک درست و کدام یک نادرست‌اند؟ علت نادرستی را توضیح دهید.

$$\begin{array}{cccc} \sqrt{25} > 5 \text{ نادرست} & \sqrt{25} = 5 \text{ درست} & \sqrt{25} = 5 \times 2 \text{ نادرست} & \sqrt{25} = 25 \text{ نادرست} \\ \sqrt{25} = 5 \text{ درست} & \sqrt{25} = -5 \text{ نادرست} & -\sqrt{25} = -5 \text{ نادرست} & \sqrt{25} < 5 \text{ نادرست} \end{array}$$

۱- در شکل زیر، مربع‌هایی با مساحت ۴، ۸ و ۹ نمایش داده شده‌اند. طول ضلع‌های مربع‌ها نیز مشخص شده است. با کمک شکل عبارت را کامل کنید.



به نظر شما عدد $\sqrt{8}$ به کدام یک از این دو عدد نزدیک‌تر است؟ $\sqrt{8}$ با ۳ نزدیک‌تر است زیرا ۸ با ۹ نزدیک‌تر است.

۲- به کمک روش بالا و با توجه به سطر اول جدول زیر، جذر تقریبی عددهای داده شده را به دست آورید و جدول را کامل کنید.

مربع کامل قبلی	عدد	مربع کامل بعدی	جذر تقریبی
۴	۵	۹	$\sqrt{5}$ بین عددهای ۲ و ۳ است
۱۶	۱۷	۲۵	$\sqrt{17}$ بین عددهای ۴ و ۵ است.
۴۹	۶۱	۶۴	$\sqrt{61}$ بین عددهای ۷ و ۸ است
۲۵	۳۰	۳۶	$\sqrt{30}$ بین عددهای ۵ و ۶ است

$$25 < 28 < 32 \rightarrow 5 < \sqrt{28} < 6$$

۱- می‌خواهیم مقدار تقریبی $\sqrt{28}$ را به دست آوریم. بین ۵ و ۶

(الف) $\sqrt{28}$ بین کدام دو عدد طبیعی قرار دارد؟ چرا؟ به ۵ زیرا ۲۸ به ۲۵ نزدیک تر است.

(ب) به کدام یک نزدیک تر است؟ چرا؟

$$\sqrt{28} = 5.13$$

(ج) با توجه به جدول زیر جای خالی را کامل کنید:

عدد	۵	۵/۱	۵/۲	۵/۳	۵/۴
مجذور	۲۵	۲۶/۰۱	۲۷/۰۴	۲۸/۰۹	۲۹/۱۶

۲- به همین روش مقدار تقریبی عددهای زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{30} = 5.47, \quad 4 < \sqrt{20} < 5, \quad \sqrt{14} = 3.74, \quad 3 < \sqrt{14} < 4, \quad \sqrt{8} = 2.82, \quad 2 < \sqrt{8} < 3$$

۱- چرا عددهای منفی جذر ندارند؟ یعنی عبارت مقابل بی معناست؟ $\sqrt{-25} = ?$ زیرا مجذور هیچ عددی منفی نمی‌شود.

۲- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

نادرست $\sqrt{5} > 4$ بین ۳ و ۲ است

درست $\sqrt{15} < \sqrt{21} < 9$ $4 < 4 < 9$ $\sqrt{6}$ بین ۷ و ۵ است

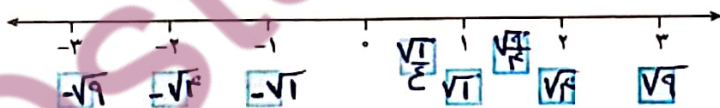
درست $\sqrt{12} < 4$

درست $\sqrt{40}$ بین ۷ و ۵ است

نادرست $\sqrt{3} > 2$

زیرا $1 < 3 < 4$ بنابراین $\sqrt{3}$ بین ۲ و ۱ است.

۳- به جای \square در محور اعداد زیر یکی از عددهای $\sqrt{9}$ ، $-\sqrt{4}$ ، $\sqrt{1}$ ، $-\sqrt{1}$ ، $\sqrt{\frac{1}{4}}$ ، $-\sqrt{\frac{1}{4}}$ ، $\sqrt{4}$ و $-\sqrt{9}$ را قرار دهید.



۴- جاهای خالی را کامل کنید.

(الف) ۷ و -۷ ریشه‌های 49 هستند. (ب) مجذور عدد صفر همان صفر است.

(ج) اگر عددی صفر نباشد، توان دوم آن همیشه مثبت است.

(د) هر عدد مثبت دارای $\sqrt{\quad}$ ریشه دوم است که یکی از آنها $\sqrt{\quad}$ دیگری است.

۵- مقدار تقریبی عددهای زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{1000} \approx 31.6, \quad \sqrt{500} \approx 22.4, \quad \sqrt{30} \approx 5.5, \quad \sqrt{40} \approx 6.3$$

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جملات خود آنها را تعریف کنید و برای هر کدام یک مثال بزنید.

- توان
- پایه
- مجذور
- مکعب
- جذر
- جذر تقریبی

در این فصل روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود یک خلاصه درس تهیه کنید.

- محاسبه عدد توان‌دار

- محاسبه یک عبارت توان‌دار با رعایت ترتیب

- تأثیر پرانتز در محاسبه عبارت توان‌دار

- محاسبه عبارت توان‌دار با پایه‌های منفی

- توان صفر

- قانون ضرب با پایه‌های مساوی

- استفاده از قانون ضرب با پایه‌های مساوی در محاسبه

- قانون ضرب با توان‌های مساوی

- استفاده از قانون ضرب با پایه‌های مساوی در تجزیه عددها

- ساده کردن یک عبارت توان‌دار

- مفهوم مجذور و مکعب

- مفهوم جذر و ریشه

- پیدا کردن جذر یا ریشه عددهای مربع کامل و جذر تقریبی

کاربرد

از این درس در ساده کردن عبارت‌های جبری و نوشتن رابطه‌های ریاضی در محاسبه سطح و حجم استفاده می‌کنیم.

تمرین‌های ترکیبی

در صورتی که تمرین‌های ترکیبی زیر را بتوانید انجام دهید، مطمئن می‌شوید که این فصل را به خوبی آموخته‌اید.

۱- عبارت توان‌دار زیر را محاسبه کنید.

$$(2^3 + 0^2)^1 + 2^2 \times 3^2 - 1^2 = (8 + 0)^1 + 4 \times 9 - 1 = 8 + 36 - 1 = 43$$

۲- عبارت توان‌دار را تا جایی که ممکن است، ساده کنید.

$$(0/25)^2 \times (\frac{1}{4})^2 \times \frac{1}{45} = (\frac{1}{4})^2 \times (\frac{1}{4})^2 \times \frac{1}{45} = \frac{1}{16} \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{45} = \frac{1}{1440}$$

۳- مقدار تقریبی عدد $\sqrt{32}$ را بنویسید.

$$\sqrt{32} \approx 5.66$$

۴- ریشه‌های دوم عدد ۱۲۱ را بنویسید و تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\sqrt{49} = 7$$

$$-\sqrt{121} = -11$$

$$-\sqrt{25} = -5$$

$$\sqrt{121} = 11$$